

Herleitung des Antriebsmoments in Bezug auf träge Massen über das reduzierte Massenträgheitsmoment:

Kinetische Energie im Mechanismus:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [m_i \cdot (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + J_i \cdot \dot{\varphi}_i^2] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [m_i \cdot (x_i'^2 + y_i'^2) + J_i \cdot \varphi_i'^2] \cdot \dot{\varphi}^2$$

mit

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{dy_i}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

bei der Antriebsgröße $\varphi(t)$.

Die gleiche kinetische Energie soll am Antrieb mit dem reduzierten Massenträgheitsmoment $J_{red}(\varphi)$ umgesetzt werden:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot J_{red}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2$$

Das reduzierte Massenträgheitsmoment ist so definiert, dass es die gleiche kinetische Energie umsetzt wie die verteilten Massen im Mechanismus.

Aus dem Vergleich der beiden Formeln ergibt sich:

$$J_{red}(\varphi) = \sum_{i=1}^n [m_i \cdot (x_i'^2 + y_i'^2) + J_i \cdot \varphi_i'^2]$$

Leistung, die dadurch im Mechanismus umgesetzt wird:

$$P = \frac{dW_{kin}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot J_{red}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 + J_{red}(\varphi) \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot J_{red}'(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^3 + J_{red}(\varphi) \dot{\varphi} \ddot{\varphi}$$

Die momentane Antriebsleistung ist das Produkt aus Moment und Winkelgeschwindigkeit:

$$P = M_{an}(t) \cdot \dot{\varphi}$$

Damit ergibt sich als Antriebsmoment:

$$M_{an}(t) = P / \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot J_{red}'(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 + J_{red}(\varphi) \ddot{\varphi}$$

Die Änderung des reduzierten Massenträgheitsmoments $J_{red}(\varphi)$ erwächst aus den Übertragungsfunktionen $x_i(\varphi)$, $y_i(\varphi)$ und $\varphi_i(\varphi)$, nicht aus den Masseparametern m_i , J_i .

Bei dem Moment $M = dL / dt$ aus dem Drallsatz mit

$$M = J' \dot{\varphi}^2 + J \ddot{\varphi}$$

hingegen bezieht sich die Änderung des Massenträgheitsmoments direkt auf die Masseparameter selbst. Der Drallsatz wird nicht anwendbar sein, wenn die Antriebsachse nicht mit der momentanen Drehachse des Körpers übereinstimmt, auf den sich der Drall bezieht.